TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmalari

"Oliy matematika" kafedrasi dotsenti
Ergashev To'xtasin Gulamjanovich

www.tiiame.uz

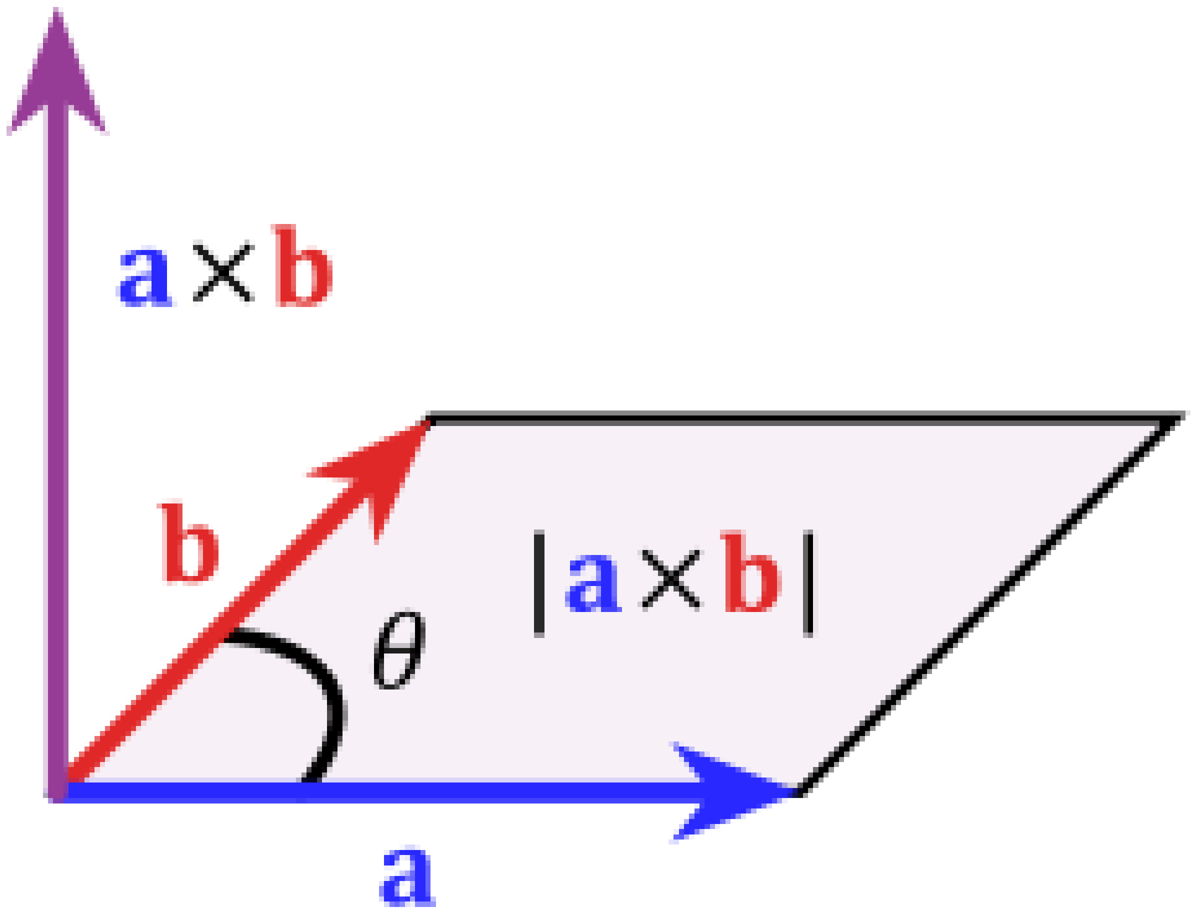
Reja:

1 Vektorlarning vektor ko’paytmasi.

2 Vektorlarning aralash ko’paytmasi.

3 Vektorlarning tadbiqlari

Vektorlarning vektor ko'paytmasi



$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga

vektor ko'paytmasi deb

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

ko'rinishda belgilanuvchi va

quyidagi shartlarni

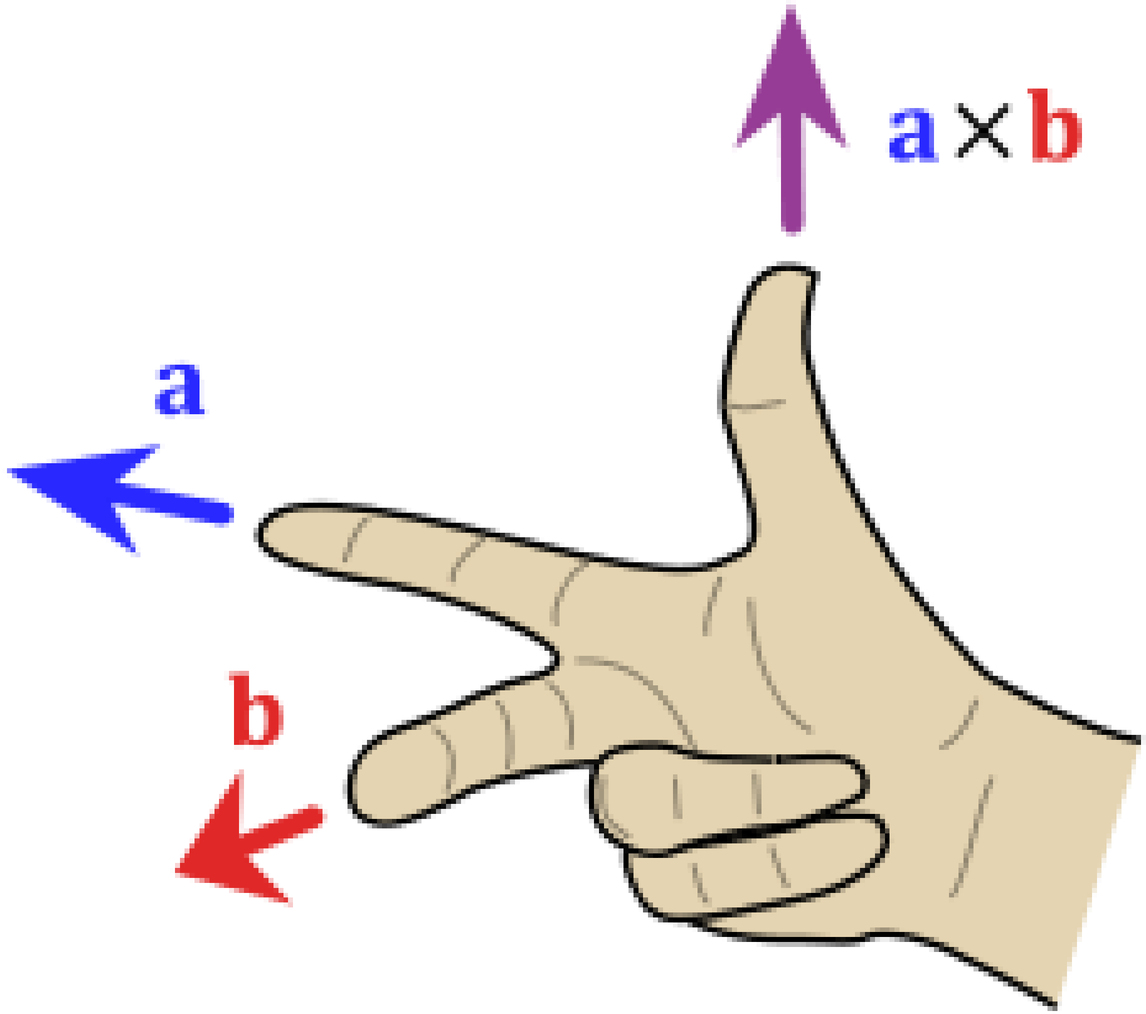
qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga

aytiladi:

Vektorlarning vektor ko'paytmasi

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar;

2. $\vec{c}$ vektorning uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini **o'ng uchlik** deyiladi);

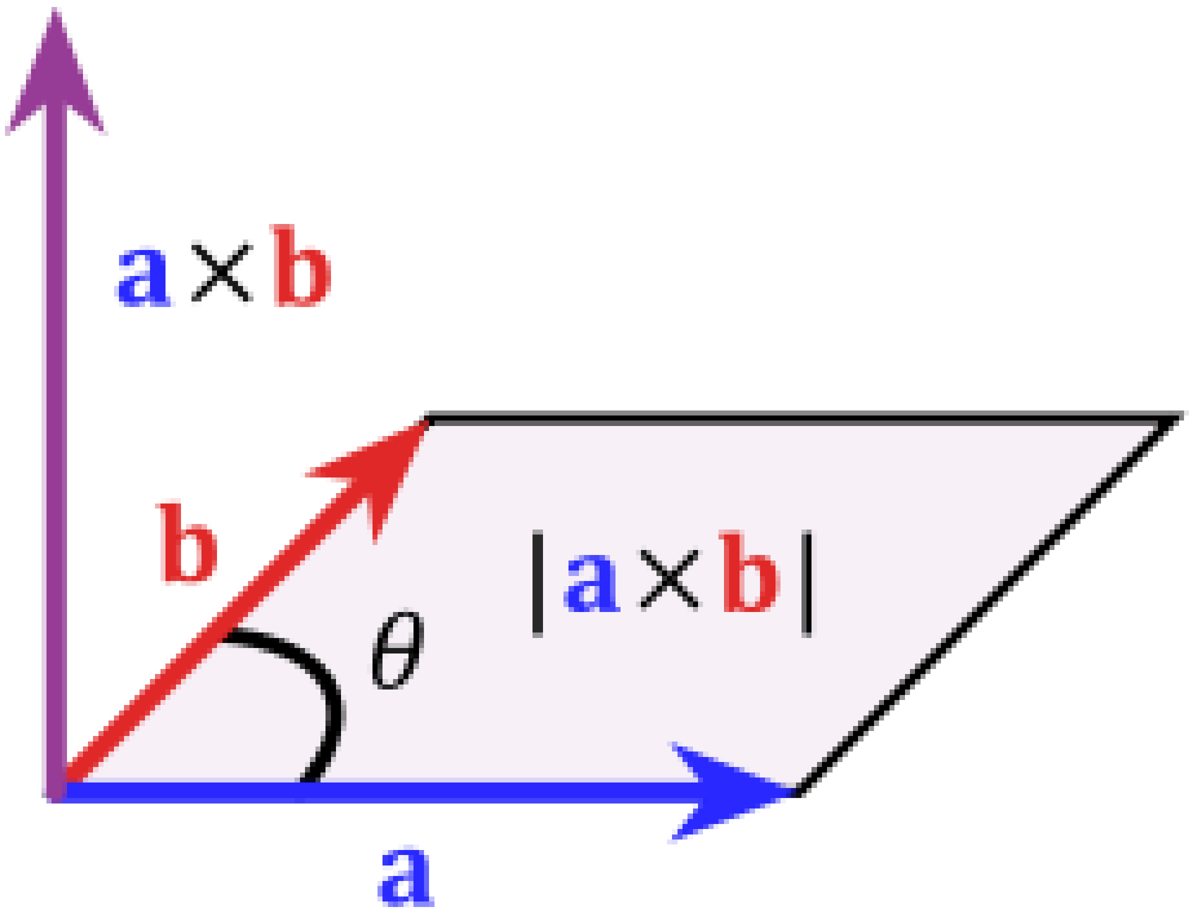


Vektorlarning vektor ko’paytmasi

3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuziga teng, ya’ni

$$|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\,\phi$$

bu yerda ϕ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

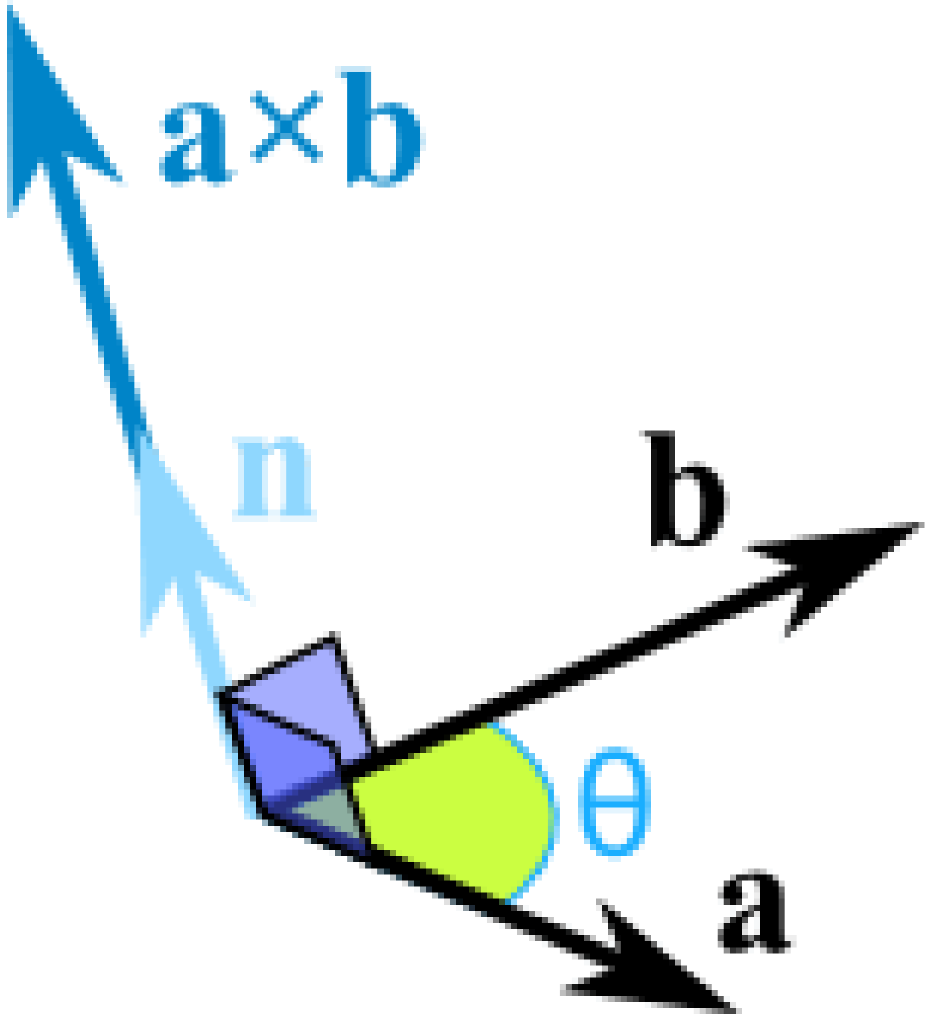


Vektorlarning vektor ko’paytmasi

Vektor ko’paytmaning xossalari:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$
- agar $\vec{a} = \mathbf{0}$, yoki $\vec{b} = \mathbf{0}$, yoki $\vec{a} \parallel \vec{b}$

  bo’lsa, $\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0}$, xususan, $\vec{a} \times \vec{a} = \mathbf{0}$.



Vektorlarning vektor ko’paytmasi

Koordinata o’qlari ortlarining vektor ko’paytmasi:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\qquad \vec{j}\times\vec{j}=0,\qquad \vec{k}\times\vec{k}=0,$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

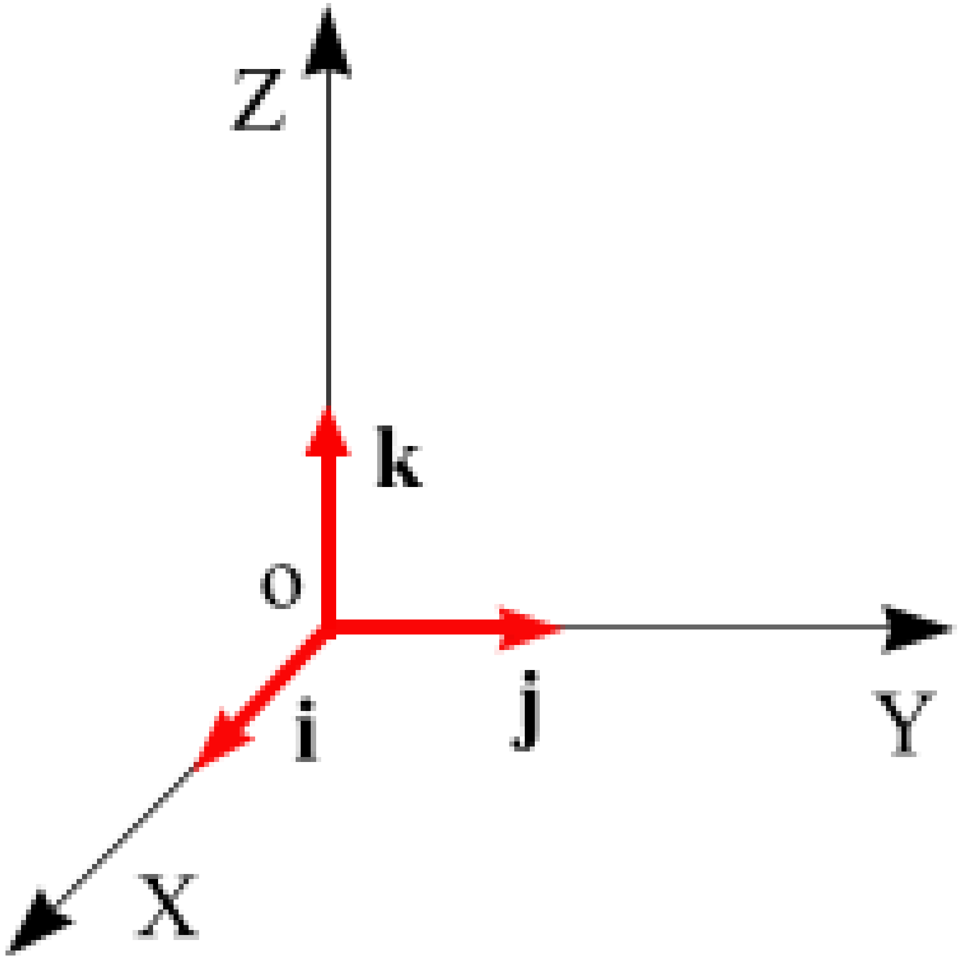
Agar

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

bo’lsa, u holda

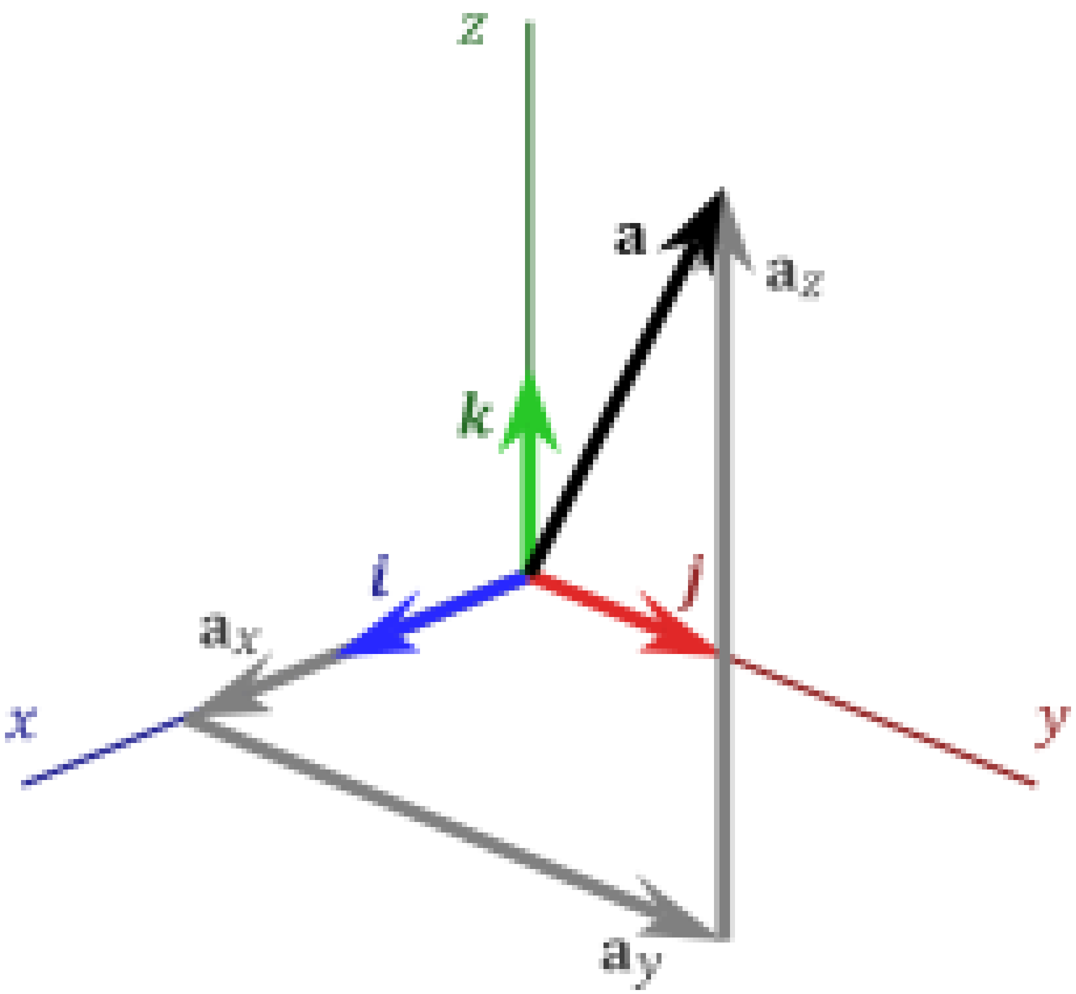
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$



Vektorlarning vektor ko’paytmasi

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo’lsa,
u holda

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$



Vektorlarning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ **vektorlarning** ***aralash ko'paytmasi*** deb $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorning $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

Bu xossadan aralash ko'paytmani $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko'rinishida belgilash mumkinligi kelib chiqadi.

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, ya'ni kopaytiriluvchi vektorlar o'rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi;

Vektorlarning aralash ko’paytmasi

Aralash ko’paytmaning xossalari:

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b},$

ya’ni qo’shni ikkita vektorlarning o’rinlari almashtirilganda aralash ko’paytmaning ishorasi o’zgaradi;

4. Agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo’lsa, u holda $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ bo’ladi.

Vektorlarning aralash ko’paytmasi

Agar

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

bo’lsa, u holda

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarda qurilgan parallepipedning hajmi shu vektorlarning aralash ko'paytmasiga teng:

$$V = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Vektorlarning tadbiqlari

Misol 1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzini toping.

Yechish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzi shu vektorlar vektor ko'paytmasining moduliga teng:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Vektor ko'paytmani topamiz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Demak, $S = \sqrt{(-12)^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 64 + 81} = 17$ kv.birlik.

Vektorlarning tadbiqlari

Misol 2. Uchlari $A(1,2,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(0,-3,2)$ va $D(1,0,1)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini toping.

Yechish. Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,0,1), \qquad \overrightarrow{AC} = (-1,-5,2), \qquad \overrightarrow{AD} = (0,-2,1)$$

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallepiped hajmining qismiga teng bo'lganligi sababli

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Piramidaning hajmi 2/3 kub birlik ekan.

Foydali adabiyotlar ro'yxati

01 Claudio Canuto, Anta Tabacco. Mathematical Analysis I, (II). Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008 (2015).

02 Б.А.Худаяров Математика. I-қисм. Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия. Тошкент, “Фан ва технология”, 2018. -284 с.

03 Б.А.Худаяров “Математикадан мисол ва масалалар тўплами” Тошкент “Ўзбекистон” 2018 йил. 304 б.

04 Э.Ф.Файзибоев, З.И.Сулейменов, Б.А.Худаяров “Математикадан мисол ва масалалар тўплами”, Тошкент, “Ўқитувчи” 2005 й. 254 б.

Foydali adabiyotlar ro’yxati

05 Ф.Ражабов ва бошқ. “Олий математика”, Тошкент “Ўзбекистон” 2007 йил. 400 б.

06 П.Е.Данко ва бошқалар. “Олий математика мисол ва масалаларда” Тошкент, “Ўқитувчи” 2007 йил. 136 б.

07 Б.А.Худаяров Сборник индивидуальных заданий по математики. Ташкент. “Ўқитувчи” 2018 г. 168 с.

E`TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

Savollar uchun

ertuhtasin@gmail.com

@ertuhtasin

www.tiiame.uz