

1-MAVZU. TO'PLAM, MUNOSABAT, FUNKSIYA, ALGORITM.

TO'PLAM. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

To'plam tushunchasi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri. Bu tushunchani o'zidan soddaroq tushunchalar orqali (bunday tushunchalar yo'q) ta'riflab bo'lmaydi. Ayni paytda, to'plam tushunchasini misollar orqali anglash qiyin emas. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to'plami, ushbu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tenglamaning ildizlari to'plami, bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami.

Demak, to'plam deganda biror umumiy xususiyatga ega bo'lgan narsalar (predmetlar) guruhi, majmuasi, yig'ilmasi tushiniladi.

To'plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi.

Odatda to'plamlar bosh harflar (masalan, $A, B, C, D, \dots$) bilan, uning elementlari esa kichik harflar (masalan, $a, b, c, d, \dots$) bilan belgilanadi.

Biror to'plamni olaylik. Uni A bilan belgilaylik. Agar a narsa (predmet) A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$, b narsa (predmet) B to'plamning elementi bo'lmasa $b \notin B$ kabi belgilanadi va " a element A to'plamga tegishli", " b element B to'plamga tegishli emas" deb o'qiladi. Misol tariqasida barcha natural sonlardan tashkil topgan to'plamni olaylik. Odatda bu to'plamni N harfi bilan belgilanadi va $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ kabi yoziladi. Ravshanki, $5 \in N$, lekin $7,05 \notin N$ bo'ladi.

To'plamlar ikki xil - chekli hamda cheksiz to'plamlar bo'ladi.

Agar to'plamni tashkil etgan elementlar soni chekli son bo'lsa, uni chekli to'plam deyiladi.

Chekli bo'lmagan to'plamlarni cheksiz to'plamlar deb qaraladi.

Masalan, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tenglamaning echimlar to'plami

$$E = \{x: x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$$

chekli to'plami bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0, \text{ ya'ni } (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

tenglamani yechib, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ bo'lishini topamiz. Demak, $N = \{1, 2, 3\}$ bo'lib, u chekli to'plamdir. Natural sonlar to'plami N cheksiz to'plamga misol bo'ladi.

Aytaylik, E to'plam ushbu

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

tenglamaning haqiqiy echimlaridan iborat to'plam bo'lsin:

$$E = \{x: x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0\}$$

E to'plamning elementlarini topish maqsadida

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

tenglamani echamiz.

Ravshanki,

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$$

Demak,

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan, $x^2 + x + 1 = 0, x^2 + 1 = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu kvadrat tenglamalarning diskriminatlari manfiy bo'lganligi sababli, ular haqiqiy echimlarga ega emas.

Binobarin, berilgan 1-tenglama haqiqiy echimlarga ega emas. Demak, E to'plamning elementlari yo'q ekan. Bunday vaziyat bo'sh to'plam tushunchasini kiritilishini taqozo etadi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan har qanday to'plam bo'sh to'plam deyiladi va uni $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Yuqorida keltirilgan E bo'sh to'plam bo'ladi: $E = \emptyset$

Ikkita A va B to'plamlari berilgan bo'lsin.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B ning qismi (qismaniy to'plami; to'plam osti) deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi.

Misolalar.

1) $A = \{0, \pi, 2\pi\}, B = \{x: \sin x = 0\}$, bo'lsin. Agar B to'plamning elementlar $\sin x = 0$ tenglamaning echimlari, ya'ni $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ko'rinishdagi sonlardan iborat ekanligini e'tiborga olsak, $E = \emptyset$ ekanini topamiz.

2) $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}, B = N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ bo'lsin.

Ravshanki, $A \subset B$ bo'ladi.

Eslatma. Bo'sh to'plam $\emptyset$ har qanday A to'plamning qismi deb qaraladi: $\emptyset \subset A$. Shuningdek $A \subset A$ bo'ladi.

Ravshanki, A, B, C to'plamlari berilgan holda $A \subset B, B \subset C$ bo'lsa, undan $A \subset C$ bo'lishi kelib chiqadi.

Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning barcha qismaniy to'plamlaridan tashkil topgan to'plamni $P(A)$ kabi belgilaymiz.

Ravshanki, $P(A)$ to'plamning har bir elementining o'zi to'plam bo'ladi.

Odatda $P(A)$ to'plam A to'plamning buleani deyiladi.

Masalan $A = \{-1, 0, 1\}$ to'plamning buleani

$P(A) = \{\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \emptyset\}$ bo'ladi.

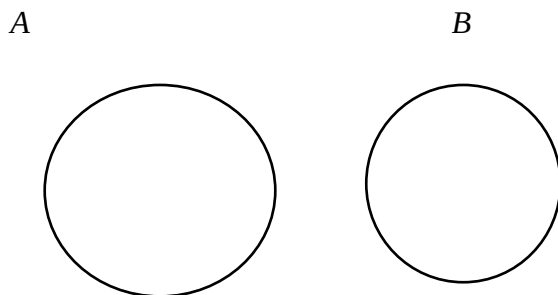
A va B to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, A va B to'plamlar teng to'plamlar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{2, 3\}, B = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ to'plamlar uchun $A = B$ bo'ladi, chunki $x^2 - 5x + 6 = 0$ kvadrat tenglamaning echimlari $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Demak, $B = \{2, 3\}$.

Ko'p hollarda to'plamlar va ular orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tassavur qilishda to'plamlarni simvolik ravishda tekislikdagi biror shakl, masalan doirachalar bilan tasvirlash qulay bo'ladi.

Masalan, A va B to'plamlar quyidagicha



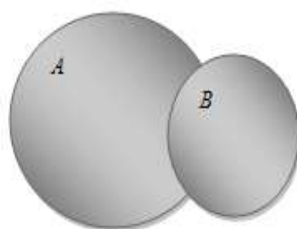
tasvirlansa, unda $A \subset B$ bo'lishi quyidagicha tasvirlanadi:



To'plamlar ustida amallar.

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

1.1 - t a r i f. A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi (1-chizma)



$$A \cup B$$

1-chizma.

Eslatma. To'plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo'lgan (bir xil) elementlar shu to'plam elementi sifatida faqat bittasigina olinadi.

Masalan, $(x-1)^2(x+2)=0$ tenglamaning (ildizlari) echimlari to'plami $\{1, -2\}$ bo'ladi.

Aytaylik, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ bo'lsin. Unda $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bo'ladi.

Agar $N_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, N_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ bo'lsa, $N_1 \cup N_2 = N$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'sin. Bu to'plamlarning birlashmasi yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

Yuqorida keltirilgan $A_1, A_2, \dots, A_n$ birlashmasi quyidagicha

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

yo'zish mumkin.

Umuman, yuqoridagidek biror α indeks ($\alpha \in I$), bo'yicha A_α to'plamlar birlashmasi ta'riflanadi va u $\bigcup_{i \in I} A_i$ kabi belgilanadi. Biror-bir a predmet $A_\alpha (\alpha \in I)$ larning birlashmasi $\bigcup_{i \in I} A_i$ ga tegishli bo'ladi, faqat va faqat, agarda shunday $\alpha_0 \in I$ topilib, $a \in A_{\alpha_0}$ bo'lsa; to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) ta'rifidan bevosita quyidagi tengliklarning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

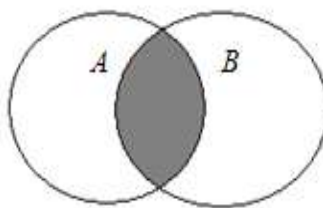
1.2.1. $A \cup A = A$ (birlashmaning idempotentligi)

1.2.2. $A \cup B = B \cup A$ (birlashmaning kommutativligi)

1.2.3. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ bo'ladi.

1.2.4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (birlashmaning assotsiativligi).

1.2 - t a ' r i f. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi (2-chizma).



$$A \cap B$$

2-chizma

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ bo'lsa,

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \{6, 7\} \quad \text{bo'ladi.}$$

Yuqoridagi N_1 va N_2 to'plamlar uchun $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ bo'ladi.

Ikki to'plam kesishmasi bo'sh to'plam bo'lsa, bu to'plamlar kesishmaydigan (diz'yunkt) to'plamlar deyiladi.

Masalan, yuqoridagi A va C hamda N_1 va N_2 to'plamlar diz'yunkt to'plamlarga misol bo'ladi.

Aytaylik $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning kesishmasi

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi.

Quyidagi xossalar o'rinli:

1.2.5. $A \cap A = A$ (kesishmaning idempotentligi)

1.2.6. $A \cap B = B \cap A$ (kesishmaning kommutativligi)

1.2.7. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cap B = A$ bo'ladi.

1.2.8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (kesishmaning assotsiativligi)

1.2.9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)

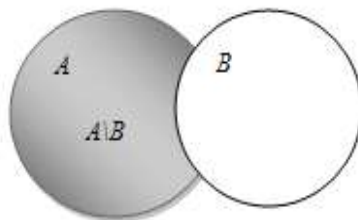
1.2.10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi)

1.2.11. $A \cup (A \cap B) = A$

1.2.12. $A \cap (A \cup B) = A$

Bu xossalarning isbotlari birlashma va kesishma ta'riflaridan kelib chiqadi.

1.3 - t a ' r i f. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi (3-chizma)



3-chizma.

Masalan, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 5, 6, 7\}$ bo'lsa,

$A \setminus B = \{3, 4\}$, va $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$ bo'ladi.

Agar $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $N_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ bo'lsa,

$N \setminus N_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ bo'ladi.

A , B va C to'plamlari berilgan bo'lsin. U holda

$$\mathbf{1.2.13.} \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$\mathbf{1.2.14.} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ bo'ladi.}$$

Bu xossalardan birini, masalan, 1.2.13-xossani isbotlaymiz.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ ni isbotlash uchun}$$

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ va } A \setminus (B \cup C) \supset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

munosabatlarning bajarilishini ko'rsatish etarli.

$\forall a \in A \setminus (B \cup C)$, bo'lsin. U holda $a \in A$, $a \notin B \cup C \Rightarrow a \notin B$ va $a \notin C$ bo'lib, $a \in A \setminus B$ va $a \in A \setminus C$ bo'ladi. Demak, $a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, bundan $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ bo'lsin. U holda $a \in (A \setminus B)$ va, $a \in (A \setminus C) \Rightarrow a \in A, a \notin B, a \notin C$ bo'lib, $a \in A, a \notin B \cup C$ bo'ladi.

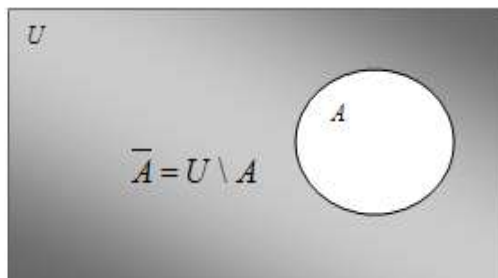
Demak, $a \in A \setminus (B \cup C)$.

Bundan, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

To'plamlar ustida amallar kiritilishida, ularni ixtiyoriy to'plamlar deb qaraldi. Masalan, A deb shkafdagi kitoblar to'plamini, B deb suv havzasidagi baliqlar to'plamini olish mumkin edi. Bunday to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi shunchaki aytilishi mumkin bo'lsada, ma'lum g'ayritabiiylikni yuzaga keltiradi.

Muayyan vaziyatdan chiqish uchun biror U to'plami (odatda uni universal to'plam deyiladi) olinib, uning qism to'plamlari ustida amallar bajariladi. (masalan, U deb doska tekisligidagi barcha nuqtalar to'plamini olish mumkin). Xuddi shuningdek, A to'plam $P(A)$ uchun universal to'plam bo'ladi.

1.4 - t a ' r i f. Ushbu $U \setminus A$ to'plam A to'plamni U to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi:



4-chizma.

Quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$1.2.15. A \cup \bar{A} = U$$

$$1.2.16. A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$1.2.17. \overline{\bar{A}} = A \text{ (to‘ldiruvchi amalining involyutivligi).}$$

$$1.2.18. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ (birlashma uchun de Morgan qonuni)}$$

$$1.2.19. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ (kesishma uchun de Morgan qonuni)}$$

$$1.2.20. A \setminus B = A \cap \bar{B} \text{ (ayirma amalini kesishma va to‘ldiruvchi amallari orqali ifodalash).}$$

Bu tengliklarni isbotlash qiyin emas. Ulardan birini, masalan , 1.2.18-tenglikning isbotini keltiramiz .

$\forall x \in \overline{A \cup B}$ bo‘lsin. U holda $x \notin A \cup B$ bo‘lib, $x \notin A, x \notin B$ ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki, $x \notin A$, bo‘lgani uchun, $x \in \bar{A}, x \notin B$ bo‘lgani uchun $x \in \bar{B}$.

Demak, $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Bu esa

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \quad (2)$$

bo‘lishini bildiradi.

Endi $\forall x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ bo‘lsin. Unda $x \in \bar{A}, x \in \bar{B}$ bo‘lib, $x \notin A, x \notin B$ bo‘ladi.

Demak, $x \notin A \cup B$. Bu holda $x \in \overline{A \cup B}$ bo‘ladi. Bu esa

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (3)$$

ekanini bildiradi.

(2) va (3) munosabatlardan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ tenglik kelib chiqadi. 18-xossa isbot bo'ldi.

1.5-ta'rif. Ushbu $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ to'plamga A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $A \Delta B$ kabi belgilanadi.

Yuqorida keltirilgan 1.4-ta'rif va (1.2.9, 1.2.10) xossalardan foydalanib, $A \Delta B$ uchun quyidagi ikki munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

1.2.1-Misol.

Berilgan A, B, C to'plamlar uchun $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ assotsiativlik munosabati o'rinli ekanligi ko'rsatilsin.

Echish: Quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$D = A \Delta B$$

U holda

$$(A \Delta B) \Delta C = D \Delta C = (D \cup C) \cap (\bar{D} \cup \bar{C})$$

bo'ladi.

Endi $D \cup C$ va $\bar{D} \cup \bar{C}$ larni hisoblaymiz:

$$((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cup C = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} \cup \bar{C} &= \overline{((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) \cup C} = \overline{(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B) \cup C} = \\ &= ((\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cup \bar{C} = (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

ekan.

Xuddi shunga o'xshash $B \Delta C$ ni D_1 orqali belgilab,

$$A \Delta D_1 = A \Delta (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, $A \Delta (B \Delta C) = A \Delta (B \Delta C)$ o‘rinli bo‘lar ekan.

Ravshanki, $A = B$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C to‘plam uchun $(A \Delta C) = (B \Delta C)$ bo‘ladi.

Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli bo‘larmikan?

1.2.2-misol.

Biror C to‘plam uchun $A \Delta C = B \Delta C$ bo‘lsa, $A = B$ ekanligi ko‘rsatilsin.

Yechish. $A \Delta C = B \Delta C$ dan $(A \Delta C) \Delta C = (B \Delta C) \Delta C$ ga ega bo‘lamiz.

1-misol echimiga binoan esa, $(A \Delta C) \Delta C = A \Delta (C \Delta C) = A \Delta \emptyset = A$ bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash,

$$(B \Delta C) \Delta C = B \Delta (C \Delta C) = B \Delta \emptyset = B$$

Demak, $A = B$ bo‘lar ekan.

1.2.3-misol. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ o‘rinli ekanligini ko‘rsatilsin.

Yechish.

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = \\ &= (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Eslatma. Biz $A = A \cap A$ ekanligidan unumli foydalandik.

To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi

Ikkita A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ bo‘lsin. A to‘plamga tegishli bo‘lgan biror a elementni va B to‘plamga tegishli bo‘lgan biror b elementni olamiz. Birinchi elementi a , ikkinchi elementi b bo‘lgan tartiblangan (a, b) juftlikni hosil qilamiz.

1.6 - t a ‘ r i f. Barcha (a,b) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topgan $\{(a,b): a \in A, b \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi.

Demak, $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

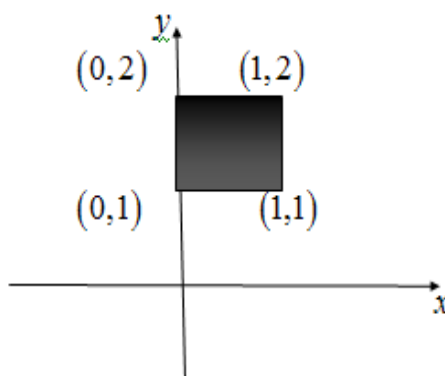
Masalan, $A = \{0,1\}$, $B = \{a,b\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A \times B$ quyidagicha

$A \times B = \{(0,a), (0,b), (1,a), (1,b)\}$ bo‘ladi. $B \times A$ esa ushbu

$B \times A = \{(a,0), (b,0), (a,1), (b,1)\}$ bo‘ladi.

Demak, umuman aytganda, $A \times B \neq B \times A$ ekan.

Keyingi misol tariqasida A to‘plam deb $[0,1]$ segment nuqtalaridan iborat $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ to‘plamni, B to‘plam deb $[1,2]$ segment nuqtalaridan iborat $B = \{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 2\}$ to‘plamni olaylik. Bu to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A \times B = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ to‘plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalardan iborat to‘plam bo‘ladi:



5-chizma .

Shuni ta’kidlash lozimki, ikki (a,b) va (c,d) juftliklar $a=s$, va $b=d$ bo‘lgandagina teng deb qaraladi.

To'plamlarning dekart ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik bizga A , B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. U xolda

$$1.3.1. A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

1.3.2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu xossalardan 1.3.1-ni isbotlaymiz.

Aytaylik, $x \in A \times (B \cap C)$ bo'lsin. Unda $x = (a, d)$ bo'lib,

$$a \in A, d \in B \cap C$$

bo'ladi.

$$d \in B \cap C,$$

bo'lishidan esa, $d \in B$, $d \in C$ ekanligini topamiz.

$$a \in A, d \in B; \quad (a, d) \in A \times B$$

$$a \in A, d \in C; \quad (a, d) \in A \times C$$

Demak,

$$(a, d) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

ya'ni

$$x \in (A \times B) \cap (A \times C) \quad (4)$$

bo'ladi.

Endi $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ bo'lsin. Unda $x \in (A \times B)$, $x \in (A \times C)$ bo'ladi.

Ta'rifga binoan

$$x \in A \times B; \quad x = (a, b); \quad a \in A, b \in B$$

$$x \in A \times C; \quad x = (a, c); \quad a \in A, c \in C \quad \text{bo'ladi.}$$

Ravshanki :

$$x = (a, b) = (a, c); \quad b = c$$

$$\text{Demak, } a \in A, b \in B \cap C; \quad (a, b) \in A \times (B \cap C)$$

ya'ni $x \in A \times (B \cap C)$ (5) bo'ladi.

(4) va (5) munosabatlardan

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

1.3.1.-misol.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ bo'lsa, $A \times B$ hisoblansin.

Echish: $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$ bo'ladi.

1.3.2. -misol.

A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsin. $n(A)$ va $n(B)$ lar esa, A va B to'plam elementlar sonini belgilasin. U holda $n(A \setminus B) = n(A) \setminus n(A \cap B)$ ekanligi ko'rsatilsin.

Echish: Ravshanki, $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ bo'ladi.

$A \setminus B = C$ bo'lsin. U holda, $A = C \cup (A \cap B)$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan tashqarii, $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ bo'ladi. Shu sababli, $n(A) = n(C) + n(A \cap B) \Rightarrow n(C) = n(A) - n(A \cap B)$ kelib chiqadi. $C = A \setminus B$ sababli, $n(A \setminus B) = n(A) \setminus n(A \cap B)$ bo'ladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Agarda $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ bo'lsa, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$ lar hisoblansin.
2. A va B to'plamlar uchun $A \subseteq B$ bo'lishi uchun $A \cap B = A$ bo'lishi zarur va etarli ekanligi ko'rsatilsin.
3. A -to'plam o'n ta elementdan iborat bo'lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo'ladi?
4. $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ bo'lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo'ladi?
5. A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsa, quyidagilar isbotlansin:

a) *azapda* $A \cap B = \emptyset$ *bo'lsa*, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$;

b) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$;

6) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

6. quyida keltirilgan munosabatlar o'rinli bo'lsa, isbotini keltiring, aks holda o'rinli emasligini tasdiqlovchi misol keltiramiz:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap C$;

6) $\overline{(A \setminus B)} = \overline{(B \setminus A)}$;

z) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

d) agar $A \Delta C = B \Delta C$ bo'lsa, $A = B$ bo'ladi.

2 -§.BINAR MUNOSABATLAR

2.1. Binar munosabat tushunchasi

Atrofni kuzatish, fanni o'rganish jarayonida turli munosabatlarga duch kelamiz. Masalan, odamlar orasida do'stlik munosabati, mamlakatlar orasida diplomatik munosabat, matematikada uchburchaklar orasidagi o'xshashlik munosabati, to'g'ri chiziqlar orasidagi paralellik munosabati kabi munosabatlar to'g'risida gapirish mumkin bo'ladi.

Keltirilgan misollardan A to'plam (odamlar to'plami, mamlakatlar to'plami, uchburchaklar to'plami, to'g'ri chiziqlar to'plami) bo'lsa, uning elementlaridan ma'lum munosabatda bo'lganlari $A \times A$ ning qisman to'plamini tashkil etishini ko'ramiz.

Ushbu paragrafda matematikada o'rganiladigan munosabatlarni bayon etamiz.

Avvalo bitta sodda misol keltiramiz.

Aytaylik, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ bo'lsin. A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$

bo'ladi. Bu to'plam elementlari (x, y) lar orasida

$$x + y = 5 \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchilari $(1, 4)$ va $(3, 2)$ lar bo'ladi. Demak,

$A \times B$ to'plam elementlari orasida (1) munosabatda bo'ladiganlari $\{(1, 4), (3, 2)\}$ to'plamni tashkil etib, u $A \times B$ ning qismi bo'ladi:

$$\{(1, 4), (3, 2)\} \subset A \times B$$

Xuddi shu $A \times B$ to'plam elementlari (x, u) lar orasida

$2x = y \quad (2)$ shartini qanoatlantiruvchilari $(1, 2)$, $(2, 4)$ lar bo'ladi. Bu holda $A \times B$ to'plam elementlari orasida (2) munosabatda bo'lganlari $\{(1, 2), (2, 4)\}$ to'plam bo'ladi va u ham $A \times B$ ning qismi bo'ladi:

$$\{(1, 2), (2, 4)\} \subset A \times B$$

Bunday vaziyatda, tabiiyki, $\{(1, 4), (3, 2)\}$ va $\{(1, 2), (2, 4)\}$ qism to'plamlar mos ravishda (1) va (2) munosabatlar orqali aniqlangan deb aytish mumkin.

Ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lib, $A \times B$ esa ularning dekart ko'paytmasi bo'lsin.

2.1 - t a ' r i f. $A \times B$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plami

$(R \subset A \times B)$ A va B to'plamlar orsidagi binar munosabat deyiladi. Bu

binar munosabat A va B to'plamlarda aniqlangan deyiladi.

Xususan, $A = B$ bo'lsa, $R \subset A \times A$ binar munosabat A da aniqlangan binar munosabat deb qaraladi.

Binar munosabatlar, odatda $R, Q, R, \dots$ - kabi belgilanadi.

Aytaylik, $(x, y) \in R, R \subset A \times A$ bo'lsin. Bu A to'plamning x elementi u elementi bilan R munosabatda bo'ladi deganidir. Uni xRy kabi ham belgilanadi.

2.1.1.-misol.

$A = \{2, 5, 4, 6\}$ bo'lsin, $E = \{(x, y) : x = y\} \subset A \times A$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $E = \{(2, 2), (5, 5), (4, 4), (6, 6)\}$ bo'ladi. R munosabat xRu ; $x = u$ tenglikni bildiradi.

Binar munosabatlar ustida amallar.

Endi binar munosabatlar ustida bajariladigan amallarni qaraymiz.

Ma'lumki, R munosabat $A \times A$ to'plamning qisman to'plami, ya'ni to'plam bo'lib, ixtiyoriy to'plamlar ustida bajariladigan amallar esa maskur bobning I-paragrafidan keltirilgan.

Binar munosabatlarda birlashma, kesishma, ayirma amallari bilan bir qatorda, ulargagina xos bo'lgan teskari hamda ko'paytma amallari kiritiladi.

A va B to'plamlarda R munosabat berilgan bo'lsin: $(x, y) \in R$, $R \subset A \times B \times A$ to'plamda aniqlangan ushbu $Q = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ munosabat, berilgan munosabatga teskari munosabat deyiladi.

Uni P^{-1} kabi belgilanadi.

Demak, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$

A va B to'plamda $R_1 (R_1 \subset A \times B)$ B , S da $R_2 (R_2 \subset B \times S)$ munosabatlar berilgan bo'lsin. B to'plamda shunday u element topilib, $(x, y) \in R_1$,

$(y, z) \in R_2$ bo'lsin.

Shunday (x, z) lardan tuzilgan ushbu

$\{(x, z) : u \in B, (x, u) \in R_1, (u, z) \in R_2\} \subset A \times C$ to'plamga R_1 va R_2 binar munosabatlarning ko'paytmasi deyiladi va $R_1 \cdot R_2$ kabi belgilanadi.

A , C to'plamlarning x va z elementlari $R_1 \cdot R_2$ munosabatda bo'lishi, B to'plamda shunday u element topilib, bir vatqda x bilan u R_1 munosabatda, u bilan z esa R_2 munosabatda bo'lishini bildiradi.

Yuqorida keltirilgan binar munosabatlar ko'paytmasi assotsiativ xossaga ega ekanligini ko'rsatamiz.

2.1.-teorema. Aytaylik, A va B to'plamlarda $R_1 (R_1 \subset A \times B)$, B va C to'plamlarda $R_2 (R_2 \subset B \times C)$ va C va D to'plamlarda $R_3 (R_3 \subset C \times D)$ binar munosabatlar berilgan bo'lsin. U holda

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$$

$P \subset A \times B$ bo'lsin. Agarda $(x, y) \in P$ va $(x, z) \in P$ lardan $y = z$ kelib chiqsa, P ga aniqlanish sohasi A va qiymatlar sohasi B bo'lgan funksiya deyiladi.

$P \subset A \times B$ binar munosabatga aniqlanish sohasi A va qiymatlar sohasi B bo'lgan funksiya deyiladi, agarda $(x, y) \in P$ va $(x, z) \in P$ lardan $y = z$ ekanligi kelib chiqadi. Funksiyalar binar munosabatlarning xususiy xoli bo'lganligini sababli yuqoridagi (*) munosabatdan quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

2.1.-natija. Agarda yuqoridagi (*) munosabatda P_1, P_2, P_3 larni mos ravishda f_1, f_2, f_3 funksiyalar bilan almashtirsak, f_1, f_2, f_3 funksiyalarning ko'paytmasi assotsiativlik xossasiga ega ekanligini ko'ramiz endi (*) munosabatni isbotlaymiz.

$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ to'plamdan ixtiyoriy (a, d) elementni olaylik: $(a, d) \in R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ u holda R_1 va $R_2 \cdot R_3$ larning ko'paytmasi tushunchasiga ko'ra, shunday $b \in B$ topiladiki, $(a, b) \in R_1$, $(b, d) \in R_2 \cdot R_3$ bo'ladi.

Ya'ni ko'paytma tushunchasiga ko'ra, shunday $c \in C$ topiladiki

$$(b, c) \in R_2, (c, d) \in R_3$$

bo'ladi. Demak,

$$(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2$$

Undan

$$(a, c) \in R_1 \cdot R_2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan,

$$(a, c) \in R_1 \cdot R_2 \text{ va } (c, d) \in R_3$$

bo'lishidan esa

$$(a, d) \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ dan olingan ixtiyoriy (a, d) element $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ to'plamga ham tegishli bo'lar ekan: $(a, d) \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.

Bu esa

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subset (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \quad (1)$$

ekanini bildiradi.

Xuddi yuqorida keltirilgan mulohaza bilan

$$(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \subset R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \quad (2)$$

bo'lishi ko'rsatiladi. (1) va (2) lardan $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ bo'lishini topamiz.

BINAR MUOSABATLAR TURLARI

Aytaylik, A to'plamda biror $R \subset A \times A$ munosabat berilgan bo'lsin.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x elementi uchun xRx bo'lsa, u holda R *refleksiv munosabat* deyiladi.

Ravshanki, $\forall x \in A$ uchun, $(x, x) \in A \times A$

Odatda $\{(x, y) : (x, y) \in A \times A, x = y\}$ to'plam E bilan belgilanadi va diagonal to'plam deyiladi :

$$E = \{(x, y) : (x, y) \in A \times A, x = y\}$$

Demak, R munosabat refleksiv bo'lishi uchun $E \subset R$ bo'lishi lozim ekan.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari R munosabatda (xRy) bo'lishidan, y va x elementlarning ham shu munosabatda, ya'ni yRx bo'lishi kelib chiqsa, u holda R simmetrik munosabat deyiladi.

Ravshanki, bu holda $R \subset R^{-1}$ bo'ladi.

Agar $R^{-1} \subset (R^{-1})^{-1}$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda R simmetrik munosabat bo'lganda $R = R^{-1}$ bo'lishini topamiz.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x, y va z elementlari uchun x va y ning R munosabatda (xRy) , y va z larning ham shu munosabatda (yRz) , bo'lishidan x va z elementlarining R munosabatda (xRz) bo'lish kelib chiqsa, u holda R tranzitiv munosabat deyiladi.

A to'plamda R munosabatning tranzitiv bo'lishi, A to'plamda shunday u element topilib, xRy va yRz dan xRz kelib chiqishini, ya'ni $R \cdot R \subset R$ bo'lishini bildiradi.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari xRy va yRx munosabatlarda bo'lishidan $x = y$ kelib chiqsa, u holda R antisimmetrik munosabat deyiladi. Bu holda $R \cap R^{-1} = E$ bo'ladi.

M i s o l. Ushbu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plamni olaylik.

Bu to'plamda quyidagi binar munosabatlarini qaraymiz :

1) R_1 munosabat: $\forall x, y \in A, xR_1y : x - y$ ayirmaning 3 ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

2) R_2 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_2y: x$ ning y dan kichik yoki tengligini ifodalasin;

3) R_3 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_3y: y$ ning x ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

4) R_4 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_4y: 0 \leq x \cdot y$ ko'paytmaning manfiy emasligini ifodalasin;

5) R_5 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_5y: x$ ning kvadrati y ning kvadratiga teng ekanligini ifodalasin.

Ravshanki, R_1, R_2, R_4, R_5 -refleksiv, R_1, R_4, R_5 - simmetrik, R_1, R_2, R_3, R_5 tranzitiv, R_3 -antisimmetrik, hamda chiziqli munosabatlar bo'ladi. Bu holat quyidagi jadvaldan yaqqol ko'rinadi.

	Refleksiv	Simmetrik	Tranzitiv	Antisimmetrik	Chiziqli	
R_1	+	+	+	-	-	
R_2	+	-	+	+	+	
R_3	-	-	+	-	-	
R_4	+	+	-	-	-	
R_5	+	+	+	-	-	