

TARMOQLANIVCHI ALGORITMLAR. ALGEBRAIK VA
TRANSCENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI.
SAMARADORLIGINI BAHOLASH. ITERATION SIKLLAR.

Algoritmlarni loyihalash jarayonida hisob-kitoblarni davom ettirish uchun ikki va undan ko'proq yo'llar mavjud bo'lib, ulardan birini tanlashimizga to'g'ri keladi. Hisoblash yo'lini tanlash, ma'lum shartlarni bajarilishiga bog'liq. Xuddi shunday sharoitga biz kvadrat tenglamalarni yechish va uchburchakning yuzini hisoblashda duch kelganimiz. Algoritmning bunday qismini shakllantirish qoidalari bilan biz ozmi-ko'pmi tanishmiz. Ushbu bo'limda takrorlanish soni oldindan ma'lum bo'lmagan takrorlanuvchi algoritmlarni tuzish usullari bilan tanishamiz. Algoritmlarni bunday turi amaliy masalalarni yechish jarayonida hosil bo'ladi.

Ma'lumki, tabiatda yoki texnikada sodir bo'ladigan jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellar ko'pincha ushbu jarayon parametrlarini bog'lovchi tenglamalar shaklida beriladi. Agar parametrlar orasida noma'lum qiymatlilari mavjud bo'lsa, bu tenglik tenglamaga aylanadi va uni yechish kerak bo'ladi. Ba'zan tenglamaning berilishiga qarab, yechimning analitik usullarini topish mumkin. Ammo ko'p hollarda yechimning analitik usullarini topish mumkin bo'lmay qoladi va bunday hollarda taqribiy yechish usullari qo'llaniladi. Bunday yondashuvni oqalaydigan yana bir holatga e'tibor qaratsak.

Ma'lumki, jarayonning fizik parametrlari qiymatlari o'lchov asboblari yordamida o'lchanadi, asboblarning aniqligi bo'linish shkalasi va asboblarning sozligiga bog'liq. Demak, o'lchov natijasida olingan qiymatlar bilvosita chetlab bo'lmaydigan xatoliklarni o'z ichiga olishi mumkin va ular natijani aniqligiga ta'sir ko'rsatadi. Bu holda berilgan tenglamaning aniq yechimini topish noreal masala bo'ladi, chunki yechim ichida dastavval xatoliklar bor.

Agar usul xatoligi dastlabki ma'lumotlar xatoligi tartibiga mos kelsa, bunday tanlangan usul mantiqan o'zini oqalaydi. Bu fikr bizga doimo qo'llanma va dasturul amal bo'lib xizmat qiladi.

Masalaning fizik tomoniga qaramasdan, to'g'ridan-to'g'ri matematik masalani ko'rib chiqamiz. Quyidagi tenglamaning $[a;b]$ oraliqdagi yechimini topish talab qilinadi:

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

Ma'lum ko'rinishdagi $f(x)$ funksiyalar uchun (3.1) tenglamaning aniq yechimlarini topishning analitik formulalari mavjud. Biz esa bu yerda (3.1) tenglamaning $f(x)$ funksiya ko'rinishiga va $[a;b]$ kesmaga bog'liq bo'lmagan holda oldindan berilgan aniqlikdagi yechimini topib beruvchi universal taqribiy usullarini ko'ramiz. Shuningdek, bu usullarning barchasi aniq algoritmlar ko'rinishida beriladi va EHMda osongina amalga oshiriladi.

Biz (3.1) tenglamaning ildizlarini ajratib olish masalasi bilan shug'ullanmasdan bu etap bosib o'tilgan va (3.1) tenglamani yagona ildizi joylashgan $[a;b]$ kesma topilgan deb faraz qilamiz. Tenglamaning ildizni $\varepsilon > 0$ aniqlikda tanlashimiz kerak bo'lib, bu yerda ε kerakli aniqlikdagi yetarlicha kichik son.

Amaliyot nuqtai nazaridan eng soda va eng oson usul bu kesmani teng ikkiga bo'lish usulidir. Shunday qilib, bizga (3.1) tenglama va bu tenglamaning $[a;b]$ oraliqqa tegishli bitta ildizi berilgan bo'lsin. (3.1) tenglama ildizining $[a;b]$ oraliqqa tegishli bo'lishining zaruriy sharti $f(a) \cdot f(b) < 0$. Bu ma'nat algoritmini tuzishdagi asosiy shart bo'ladi. Soddagina qilib algoritmini quyidagicha maxsus tushuntirishlarsiz sxematik tarzda keltiramiz:

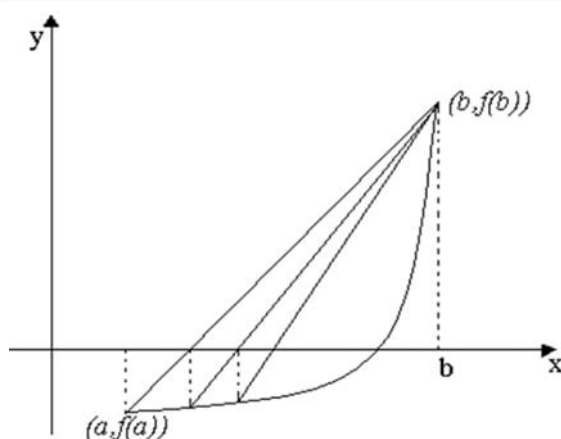
1. Kiritish a, b, ε .
2. $c = (a + b) / 2$.
3. Agar $f(a) \cdot f(c) < 0$. $b = c$ bo'lsa u holda $a = c$.
4. Agar $b - a > \varepsilon$ bo'lsa, u holda 2 ga o'tilsin.
5. $x = (a + b) / 2$.
6. Chiqish x .

Algoritmnining g'oyasi shundan iboratki, oraliqni ikkiga bo'lgandan so'ng, bo'lakni yarmini, ya'ni izlanayotgan ildiz joylashgan qismini olamiz. Bu usulni davom ettirib, n qadamdan keyin biz kerakli ildizni o'z ichiga olgan $(b - a) / 2^n$ uzunligidagi oraliqni olamiz. Agar bu oraliqning uzunligi ε dan kichik bo'lsa, u holda bu oraliqning istalgan nuqtasi, izlanayotgan ildizdan ε dan kichik masofada joylashgan bo'ladi. Shunday qilib, ushbu oraliqning o'rtasini kerakli ildizning taqribiy qiymati sifatida tanlaymiz. Quyidagi tengsizlikdan ε aniqlikka erishish uchun zarur bo'lgan qadamlar sonini oson hisoblab topish mumkin,

$$(b - a) / 2^n < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{b - a}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanib, bu algoritmgaga mos dasturni osongina tuzishimiz mumkin. Ushbu usulning kamchiligi qadamlarining ko'pligidir.

Algebraik tenglamalarni yechishning tejamkor usullaridan biri vatarlar usuli hisoblanadi. Ushbu usul g'oyasi **3.1- rasmda** sxematik tarzda ko'rsatilgan.



3.1-rasm.

$y = f(x)$ funksiya grafigini OXY dekart koordinatalar sistemasida $[a; b]$ oraliqda chizamiz. Funksiya grafigidan $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalarni olib, ularni AB to'g'ri chiziq yordamida tutashtiramiz.

Ushbu AB to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan kesishish nuqtasi (3.1) tenglamaning izlanilayotgan ildiziga navbatdagi yaqinlashishi sifatida qarash mumkin. Funksiya grafigida $A_1(x_1, f(x_1))$ nuqtani belgilaymiz. Bu nuqtadan A_1B kesmasini o'tkazib, OX o'qi bilan kesishish nuqtasini x_2 deb belgilaymiz. Ushbu jarayonni davom ettirsak, asta-sekin $y = f(x)$ funksiya grafigining OX o'qi bilan kesishish nuqtasiga izlayotgan ildizga intiluvchi $x_1, x_2, x_3, \dots$ nuqtalar ketma-ketligini hosil qilamiz.

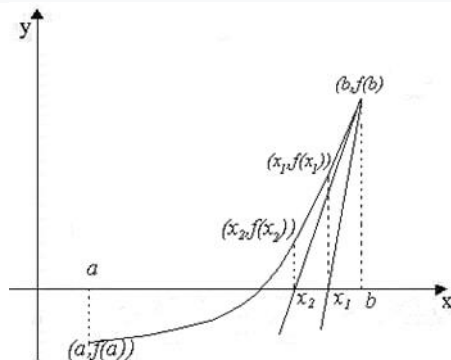
Rasmdan ko'rinib turibdiki, bu holda $B(b, f(b))$ nuqta qo'zg'almas bo'lib, $A(a, f(a))$ nuqta esa ketma-ket yaqinlashtirib boriladi. Bu usulda algoritmnining qo'zg'almas nuqtasini oldindan belgilab olish kerak bo'ladi. Agar $[a, b]$ oraliqlar bo'yicha $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, shartlar bajarilsa B nuqta qo'zg'almas bo'ladi, agar $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, bo'lsa A nuqta qo'zg'almas bo'ladi.

Ushbu usulni dastur tuzishdan oldin tekshirish mumkin, ammo doimo bunday masalalarni yechishda ushbu ifodaning ishorasi butun kesmada saqlanib qoladi va ishorani oraliqning istalgan nuqtasida tekshirib, dasturlash orqali tanlovni amalga oshirish mumkin. Yuqoridagi tushunchalardan so'ng vatarlar usuli algoritmini loyihalashtirishga kirishishimiz mumkin. Shuning uchun biz algoritmnini ma'lum bir algoritmik tilga bog'lamasdan sxematik tarzida tasvirlaymiz:

1. Kirish a, b, ε .
2. Agar $f'(a) \cdot f''(a) > 0$, va $x_0 = a$, bo'lsa u holda $k3.>$ ga o'ting, aks holda $x_0 = b$, bo'lsa $k5.>$ ga o'ting.
3. $x_1 = x_0 - f(x_0)(b - x_0)/(f(b) - f(x_0))$
4. Agar $|x_1 - x_0| > \varepsilon$ va $x_0 = x_1$, bo'lsa u holda $k3.>$ ga o'ting, aks holda $k7.$ ga o'ting.
5. $x_1 = a - f(a)(x_0 - a)/(f(x_0) - f(a))$
6. Agar $|x_1 - x_0| > \varepsilon$ va $x_0 = x_1$, bo'lsa u holda $k5.>$ ga o'ting, aks holda $k7.$ ga o'ting
7. Chiqish x_1 .

Tenglamani yechimlarni topishning bu usulini iteratsiya usuli deb ataladi. Kerakli aniqlikka yetishish uchun qancha takrorlanish qo'llanilishini oldindan bilmaymiz. Takrorlanishlar sonini hisoblaydigan hisoblagichni dastur matnga kiritishimiz mumkin. Intuitiv va vizual ravishda, 1-rasm orqali iteratsiya usuli oraliqlarni ikkiga bo'lish usulidan ancha samarali ekanligini ko'rishimiz mumkin.

Endi algebraik tenglamalarni yechishning yana bir usuli - Nyuton usulini ko'rib chiqamiz. Nyuton usuli ketma-ket yaqinlashish usuli bo'lib, uning ko'rinishini grafik usulida 2-rasmda ko'rishimiz mumkin.



2-rasm.

Nyuton usulida quyidagi shartlar bajarilsin, yani $y = f(x)$ funksiya $x \in [a, b]$ oraliqda uzluksiz va hosilasi mavjud bo'lsin, yana shu $[a, b]$ oraliqda $f'(x) \neq 0$ bo'lsin. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi $[a, b]$ oraliqda tenglamaning berilishidan u yagona yechimga ekanligi kelib chiqadi.

Bu usulda biz $x_0 \in [a, b]$ nuqtani tanlaymiz. Bu $(x_0; f(x_0))$ nuqtani boshlang'ich yaqinlashish nuqtasi deb olib, shu nuqtada funksiya grafigiga urinma

o'tkazamiz. Ushbu urinmaning OX o'qi bilan kesishish nuqtasi x_1 ni boshlang'ich yaqinlashish deb qabul qilamiz, xuddi shu tarzda, $(x_1; f(x_1))$ nuqtadan chizilgan urinmani OX o'qi bilan kesishishgan x_2 nuqtasi belgilanadi. Keyingi $x_3, x_4, \dots$ hisoblashlar ham shunga o'xshash tarzda topiladi. Bu jarayon $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ shart bajarilmaguncha davom etadi. Bu jarayonning yaqinlashuvchanligini 2-rasmdan ko'rish mumkin. Nazariy jihatdan yaqinlashish tezligi yetarlicha yuqori ekanligini ko'rishimiz mumkin. Bu amaliy misollar bilan tasdiqlangan. Nyuton usulining yana bir afzalligi shundaki, Nyuton usulida agar qandaydir xatolikka yo'l qo'ysak, ya'ni qaysidir qadamda xato qilsak, usulni o'zi to'g'ri yo'lni tanlaydi.

Endi algoritmnining matematik tavsifiga va hisoblash tartibiga o'tamiz. $y = f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0; f(x_0))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Urinmaning OX o'qi bilan kesishish nuqtasi: $y = 0$. Shuning uchun x_1 ning qiymati uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.3)$$

Bu (3.3) formula keyingi yaqinlashishga o'tish uchun qaytariluvchi (rekurent) bo'ladi. Keyingi taqribiy qiymati x_1 ni topish uchun har bir qadamda faqat oldingi x_0 taqribiy qiymatdan foydalanamiz, algoritmnini shakllantirishda biz ushbu hisoblarni qabul qilib, algoritm matnini soddalashtirishimiz mumkin. Shunday qilib, Nyuton usulining algoritmini quyidagicha ifodalashimiz mumkin.

1. Kiritish x_0, ε .
2. $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$.
3. Agar $|x_1 - x_0| > \varepsilon$ bo'lsa $x_0 = x_1$; u holda $k \leftarrow k + 1$. o'ting
4. Chiqish x_1 .

Eslatma: dasturlashda $f(x)$ va $f'(x)$ funksiyalarning ko'rinishini funksiyalarni boshlanish qismga qo'yishimiz mumkin.

Shunday qilib, biz har qanday algebraik tenglamalarni tatbiq etiladigan universal dasturni hosil qilamiz.

Endi Nyuton usulining imkoniyatlarini va uning samaradorligini ko'rsatish uchun bitta misol keltiramiz.

Misol. $\sqrt{2}$ ni qiymatini 0,001 aniqlik bilan hisoblash talab etilsin. Bilamizki arifmetik amallarning aniq, cheklangan ketma-ketligi berilmagan, shuning uchun

ba`zi hisoblashlardan so`ng biz taqribiy qiymatni olishimiz mumkin. Keling, ushbu ifodani tenglama ko`rinishida yozib olamiz:

$$x^2 - 2 = 0$$

uning ildizlaridan biri $[1, 2]$. oraliqda joylashganligini hisobga olib, bu tenglamani $f(x) = x^2 - 2$ ko`rinishida yozib, tenglamaga Nyuton usulini qo'llasak, bu holda (3.3) formula quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} \text{ yoki } x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0}.$$

Bu formuladan foydalanib $x_0 = 2$ qiymatini qo'yib hisob-kitoblarni amalga oshirsak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x_1 = \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2} = 1,5.$$

$$x_2 = \frac{1,5^2 + 2}{2 \cdot 1,5} = \frac{4,25}{3} = 1,417.$$

$$x_3 = \frac{1,417^2 + 2}{2 \cdot 1,417} = 1,414216.$$

Agar bu natijaning qiymatini $\sqrt{2} = 2,4142136$, qiymat bilan solishtirsak, farqi 0,000003 aniqlikda ekanligini ko'ramiz. Bundan ko'rinadiki uch qadamda bunday katta aniqlikka erishildi.

Xuddi shunday algoritmi har qanday darajadagi ildizlarni hisoblash uchun tuzilish mumkin. Masalan, $\sqrt[n]{a}$ topish uchun biz quyidagi tenglamani yechamiz:

$$x^n - a = 0$$

Bundan Nyuton usuli bo'yicha hisoblash formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$x_n = \frac{(n-1)x_0^{n-1} + a}{n \cdot x_0^{n-1}}.$$

- Quyidagi misollarini 0,0001 aniqlikda taqribiy yeching: $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{3}$.